**0.** **NOTAZIONI**

**0.1** **INSIEMI**

|  |
| --- |
| Un ***insieme*** è una collezione non ordinata di oggetti o elementi. Gli insiemi sono scritti tra { }, ed i suoi elementi inseriti tra esse. |
| Per ogni insieme S, w ∈ S indica che w è un ***elemento*** di S. |
| Nota: Notazione di insiemi per specificare un’ insieme: A = {x|x ∈ R, f (x) = 0}, R è l’insieme dei numeri reali, f è una qualche funzione. |

***Ordine*** e ***ridondanza*** non contano:

* {a, b, c} ha elementi a, b, c;
* {a, b, c} e {b, a, b, c, c} sono lo stesso insieme;
* {a} ed a sono cose diverse;
* {a} insieme che contiene solo elemento a.

*Esempio*:

- L’insieme dei numeri naturali è N = {0, 1, 2, 3, 4, ...}.

- L’ insieme dei numeri pari è {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} = {2n | n = 0, 1, 2, 3, ...} = {2n |n ∈ N}.

- L’ insieme dei pari positivi è {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} = {2n | n = 1, 2, 3, ...} = {2n | n ∈ N + }.

- L’ insieme dei numeri dispari è {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...} = {2n+1 | n = 0, 1, 2, ...} = {2n+1 | n ∈ N}.

- Se A = {2n | n ∈ N}, allora 4 ∈ A, ma 5 ∉ A.

|  |
| --- |
| La ***cardinalità*** |S| di S è il numero di elementi in S. |

*Esempio*:

- Se S = {ab, bb} allora |S| = 2

- Se T = {an | n > 1}, allora |T | = ∞

- Se T = ∅, allora |T | = 0

|  |
| --- |
| Un insieme S è ***finito*** se |S| < ∞. Se S non è finito, allora è detto ***infinito***. |

*Esempio*:

- Se S = {ab, bb} allora |S| = 2 e S è finito.

- Se T = {an | n > 1}, allora |T | = ∞ e T è infinito.

**0.2 ALFABETO E STRINGHE**

|  |
| --- |
| Un ***alfabeto*** è un insieme finito di elementi fondamentali (chiamati ***lettere*** o ***simboli***). |

*Esempio*:

- L’ alfabeto delle lettere romane minuscole è Σ = {a, b, c, ..., z}.

- L’ alfabeto delle cifre arabe è Σ = {0, 1, . . . , 9}.

- L’ alfabeto binario è Σ = {0, 1}

|  |
| --- |
| Una ***stringa*** su un *alfabeto* è una sequenza finita di simboli dell’alfabeto. |

*Esempio*:

- cat, food, c, babbz sono stringhe sull’ alfabeto A = {a, b, c, ..., z}.

- 0131 è una stringa sull’ alfabeto B = {0, 1, 2, ..., 9}.

- 0101 è una stringa sull’ alfabeto B = {0, 1, }.

|  |
| --- |
| Data una stringa s, la ***lunghezza*** di s è il numero di simboli in s. La lunghezza di s è denotata con ***lunghezza(s)*** o ***|s|.*** |

*Esempio*:

lunghezza(mom) = |mom| = 3.

|  |
| --- |
| Nota. La ***stringa vuota* ε** è la stringa contenente nessun simbolo, **|ε|** = 0. |

|  |
| --- |
| Dato alfabeto Σ, la ***chiusura di Kleene*** di Σ è Σ\*: l’ insieme di tutte le possibili stringhe su Σ. |

*Esempio*:

Σ = {a, b}, allora Σ\* = { ε, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, ...}

|  |
| --- |
| Date due stringhe ***u*** e ***v***, la ***concatenazione*** di ***u*** e ***v*** è la stringa ***uv.*** |

*Esempio*:

- u = abb e v = ab, allora uv = abbab e vu = ababb

- u = ε e v = ab, allora uv = ab

- u = bb e v = ε, allora uv = bb

- u = ε e v = ε , allora uv = ε; cioè εε = ε

|  |
| --- |
| Per una stringa ***w***, definiamo ***wn*** per n ≥ 0 induttivamente:  w0 = ε  wn+1 = wnw, per ogni n ≥ 1 |

*Esempio*:

- Se w = cat, allora w0 = ε,

w1 = cat,

w2 = catcat,

w3 = catcatcat,

...

- Dato simbolo a, allora a 0 = ε e a3 = aaa.

|  |
| --- |
| Data stringa s, una ***sottostringa*** di s è una qualsiasi parte di simboli consecutivi della stringa s cioè, w è una sottostringa di s se esistono stringhe x e y (eventualmente vuote) tali che: ***s = xwy***. |

*Esempio*:

- 567 è sottostringa di 56789

- 567 è sottostringa di 45678

- 567 è sottostringa di 34567

- Stringa 472 ha sottostringhe ε , 4, 7, 2, 47, 72, 472, ma 42 non è sottostringa di 472.

**0.3 LINGUAGGI**

|  |
| --- |
| Un ***Linguaggio formale*** (Linguaggio) è un insieme di stringhe su un alfabeto. |

*Esempio*:

Linguaggi per computer, quali C, C ++ o Java, sono linguaggi formali con alfabeto:

{a, b, ..., z, A, B, ..., Z , 0, 1, 2, ..., 9, >, <, =, +, −, ∗, /, (, ), · · · }

Le ***regole della sintassi*** definiscono le regole del linguaggio. L’insieme di nomi validi di variabili è un linguaggio formale.

|  |
| --- |
| **Nota**: I linguaggi non sono insiemi finiti. |

*Esempio*:

- Alfabeto A = {x}.

Linguaggio L = { ε, x, xx, xxx, xxxx, ...} = {xn |n = 0, 1, 2, 3...}.

**Nota: x 0 = ε, quindi stringa vuota in L.**

- Alfabeto A = {x}.

Linguaggio L = {x, xxx, xxxxx, ...} = {x2n+1 |n = 0, 1, 2, 3...}.

- Alfabeto A = {0, 1, 2, ..., 9}. Linguaggio L = {qualsiasi stringa che non inizia con 0} = { ε, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ...}

- Sia A = {a, b}, definiamo Linguaggio L formato da tutte le stringhe che iniziano con a seguita da 0 o più b.

Cioè L = {a, ab, abb, abbb, ...} = {abn |n ≥ 0}

|  |
| --- |
| **Nota**. ***L’insieme vuoto*** ∅ è l’ insieme che non contiene alcun elemento. |

∅ = {ε}, poichè ∅ non ha elementi. In generale, ε ∉ ∅.

**0.4 INSIEMI: RELAZIONI ED OPERAZIONI**

|  |
| --- |
| Siano S e T insiemi. Diciamo che ***S ⊆ T*** (S ***sottoinsieme*** di T) se w ∈ S implica w ∈ T. Cioè ogni elemento di S è anche un elemento T. |

*Esempio*:

- S = {ab, ba} e T = {ab, ba, aaa} allora S ⊆ T ma T ⊈ S.

- S = {ba, ab} e T = {aa, ba} allora S ⊈ T e T ⊈ S.

|  |
| --- |
| Insiemi S e T sono ***uguali*** (S = T ) ***se S ⊆ T e T ⊆ S***. |

*Esempio*:

- Siano S = {ab, ba} e T = {ba, ab}, allora S ⊆ T e T ⊆ S; quindi S = T .

- Siano S = {ab, ba} e T = {ba, ab, aaa},allora S ⊆ T ma T ⊈ S; quindi S ≠ T .

|  |
| --- |
| Dati due insiemi S e T , la loro ***unione*** S ∪ T = {w | w ∈ S oppure w ∈ T }.  S ∪ T contiene tutti gli elementi contenuti in S oppure in T (o in entrambi). |

*Esempio*:

- S = {ab, bb} e T = {aa, bb, a} allora S ∪ T = {ab, bb, aa, a}

- S = {a, ba} e T = ∅, allora S ∪ T = S.

- S = {a, ba} e T = { ε } allora S ∪ T = { ε, a, ba}

|  |
| --- |
| Dati due insiemi S e T , la loro ***intersezione S ∩ T = {w | w ∈ S e w ∈ T }.*** S ∩ T contiene tutti gli elementi comuni ad S e T. |
| Insiemi S e T si dicono ***disgiunti*** se S ∩ T = ∅ |

*Esempio*:

- Sia S = {ab, bb} e T = {aa, bb, a} allora S ∩ T = {bb}.

- Sia S = {ab, bb} e T = {aa, ba, a} allora S ∩ T = ∅, quindi S e T sono disgiunti.

|  |
| --- |
| **Lemma**. Se S e T sono disgiunti (cioè S ∩ T = ∅), allora |S ∪ T | = |S| + |T |.  **Lemma**. Se S e T sono tali che S ∩ T < ∞, allora |S ∪ T | = |S| + |T | − |S ∩ T |. |
| Dati due insiemi S e T, S − T = {w | w ∈ S e w ∉ T }. |

*Esempio*:

- Sia S = {a, b, bb, bbb} e T = {a, bb, bab}, allora S − T = {b, bbb}.

- Sia S = {ab, ba} e T = {ab, ba} allora S − T = ∅

|  |
| --- |
| Dato un insieme universale U, il ***complemento*** di un insieme S ⊆ U è C (S) = {w | w ∈ U, w ∉ S}.  C(S) è l’ insieme di tutti gli elementi considerati (elementi di U) che non sono in S (quindi C (S) = U − S). |

*Esempio*:

- U: insieme delle stringhe su alfabeto {a, b}.

S: insieme delle stringhe su alfabeto {a, b} che iniziano con b.

C (S): insieme delle stringhe su alfabeto {a, b} che non iniziano con b.

**N.B.: NON insieme stringhe che iniziano con a (es. stringa vuota ε)**

|  |
| --- |
| Dati 2 insiemi S e T di stringhe, la ***concatenazione*** (o ***prodotto***) di S e T è ST = {uv | u ∈ S, v ∈ T }  ST è l’ insieme di stringhe che possono essere divise in 2 parti: la prima parte coincide con una stringa in S la seconda parte coincide con una stringa in T . |

*Esempio*:

- Se S = {a, aa} e T = {ǫ, a, ba}, allora ST = {a, aa, aba, aaa, aaba}, TS = {a, aa, aaa, baa, baaa}

- aba ∈ ST , ma aba ∉ TS. Quindi ST ≠ TS

**0.5 SEQUENZE E TUPLE**

|  |
| --- |
| Una ***sequenza*** di oggetti è una lista di questi oggetti in qualche ordine. |
| **Ordine e ridondanza sono importanti in una sequenza (non in un insieme).** |
| ***Sequenze finite*** sono dette tuple. Una k-tupla ha k elementi nella sequenza. |

*Esempio*:

- (4, 2, 7) é una 3-tupla o tripla

- (9, 23) é una 2-tupla o coppia

**0.6 PRODOTTO CATESIANO**

|  |
| --- |
| Dati due insiemi A e B, il ***prodotto Cartesiano*** A × B é insieme di coppie: A × B = {(x, y ) | x ∈ A, y ∈ B}. |

*Esempio*:

Siano A = {a, ba, bb} e B = { ε, ba}, allora:

A × B = {(a, ε), (a, ba), (ba, ε), (ba, ba), (bb, ε), (bb, ba)}

B × A = {( ε, a), (ε, ba), (ε, bb), (ba, a), (ba, ba), (ba, bb)}.

|  |
| --- |
| Nota. (ba, a) ∈ B × A, ma (ba, a) ∉ A × B, quindi B × A 6 = A × B.  Nota. Il prodotto Cartesiano è diverso dalla Concatenazione AB = {a, aba, ba, baba, bb, bbba} = A × B.  Nota. |A × B| = |A||B|, possiamo anche definire prodotto cartesiano di più di 2 insiemi. A1 × . . . × Ak è l insieme di k–tuple:  A1 × . . . × Ak = {(x1 , . . . , xk) | x1 ∈ Ai, 1 ≤ i ≤ k} |

*Esempio*:

- Siano A1 = {ab, ba, bbb}, A2 = {a, bb}, A3 = {ab, b}, allora:

A1 × A2 × A3 = { (ab, a, ab), (ab, a, b), (ab, bb, ab), (ab, bb, b),

(ba, a, ab), (ba, a, b), (ba, bb, ab), (ba, bb, b),

(bbb, a, ab), (bbb, a, b), (bbb, bb, ab), (bbb, bb, b)}

**0.7 INSIEME POTENZA**

|  |
| --- |
| Per ogni insieme S, l’ ***insieme potenza*** P(S) è P(S) = {A | A ⊆ S}, cioè l’ insieme di tutti possibili sottoinsiemi di S (inclusi ∅ e S stesso). |

*Esempio*:

Se S = {a, bb}, allora P(S) = {∅, {a}, {bb}, {a, bb}}

|  |
| --- |
| **Lemma**. Se |S| < ∞ , allora |P(S)| = 2 |S|. Cioè , ci sono 2 |S| differenti sottoinsiemi di S. |

**0.8 CHIUSURA O KLEENE STAR**

|  |
| --- |
| Dato insieme S di stringhe, sia  S 0 = {ε},  S k = {w1 , w2 . . . wk | wi ∈ S, i = 1, 2, ..., k} = SS...S, k > 1.  concatenazione di S con se stesso per k volte. |
| **Nota**. Sk è insieme di stringhe ottenute concatenando k stringhe di S, con possibili ripetizioni. In particolare, S1 = S. |

*Esempio*:

Se S = {a, bb}, allora

S0 = {ε},

S1 = {a, bb},

S2 = {aa, abb, bba, bbbb},

S3 = {aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb}.

|  |
| --- |
| La ***Chiusura*** (o ***Kleene star***) di un insieme di stringhe S è S\* = S0 ∪ S1 ∪ S2 ∪ S3 ∪ . . . |
| **Nota**. S\* è l’ insieme di tutte le stringhe ottenute concatenando zero o più stringhe di S, potendo usare la stessa stringa più volte.  S\* = {w1, w2 ... wk | k ≥ 0, wi ∈ S, i = 1, 2, ..., k}, dove per k = 0, la stringa w1 ,w2 . . . wk = ε è la stringa vuota. |

*Esempio*:

- Se S = {ba, a}, allora S\* = {ε, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...}

- Se A = {a, b}, allora A\* = {ε, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, ...}, tutte le possibili stringhe su alfabeto A.

- Se S = ∅, allora S\* = {ε}.

- Se S = {ε}, allora S\* = {ε}.

**0.9 ALTRE PROPRIETÀ UTILI**

|  |
| --- |
| S\*\* = (S\*)\* è l’ insieme di stringhe formate concatenando stringhe di S\*. |
| Nota. S\* = S\* per ogni insieme S di stringhe. |
| S+ è l’ insieme di stringhe formate concatenando una o più stringhe di S. |

*Esempio*:

Se S = {x}, allora S+ = {x, xx, xxx, xxxx, ...}

|  |
| --- |
| Per ogni stringa w, ***l’inverso di w***, scritto ***reverse(w) o wR*** , è la stessa stringa di simboli scritta in ordine inverso .  Se w = w1, w2, . . . wn , dove ogni wi è un simbolo, allora wR = wn wn-1  . . . w1 . |

*Esempio*:

- (cat)R = tac

- ε R = ε.